4ème Sc-Exp

Série N°:6

(Limite Continuité)

EXERCICE N°1 :

Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1/ a- Montrer que pour tout réel x < 0, on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b- En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

c- Montrer que f set continue en 0.

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3/ Monter qu'il existe un réel $x_0 \in]-2,-1[$ tel que $f(x_0) = 0$

4/ a- Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) = -1 + \dfrac{4}{2+\sqrt{x}}$

b- En déduire que f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

c- Déterminer alors l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par la fonction f.

5/ a- Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

b- Montrer que : $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2} = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$

EXERCICE N°2 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x) = x^3 - 2 + \sqrt{x-1}$

1/ Montrer que f est continue sur $[1,+\infty[$.

2/ Etudier la monotonie de la fonction f.

3/ Déterminer l'image de $[1,+\infty[$ par f.

4/ a- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$.

b- Donner un encadrement de α d'amplitude 0.5

c- Vérifier que : $\alpha^3 = \dfrac{2-\alpha}{1+\sqrt{\alpha-1}}$

EXERCICE N°3 :

Soit f une fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 + 2 + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + 2x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a- Montrer que pour x > 0, on a : $x^3 + 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^3 + 2 + x^2$

b- Montrer que f est continue en 0.

c- En déduire que f est continue sur IR.

3/ a- Montrer que l'équation f(x) = 3 admet au moins une solution $\alpha \in]-1,0[$.

b- Montrer que : $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 4$ et en déduire la valeur exacte de α.

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux